Exercice A – Peser un corps céleste (10 points)

1. Pour un objet de masse m situé à la surface de la Terre, rappeler la relation vectorielle entre son poids $\vec{P}$ et le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.

$$\vec{P} = m.\vec{g}$$

2. En s'appuyant sur le modèle de la chute libre et une loi de Newton, justifier que l'intensité du champ de pesanteur g s'exprime en m·s^{-2}.

D'après la deuxième loi de Newton, appliquée au système {objet} de masse m, soumis uniquement à son poids, on a $\Sigma\overrightarrow{F_{ext.}} = \vec{P} = m.\vec{a}$

$$m.\vec{g} = m.\vec{a}$$

Soit $\vec{g} = \vec{a}$,

L'intensité g du champ de pesanteur est bien homogène à une accélération et elle s'exprime en m.s^{-2}.

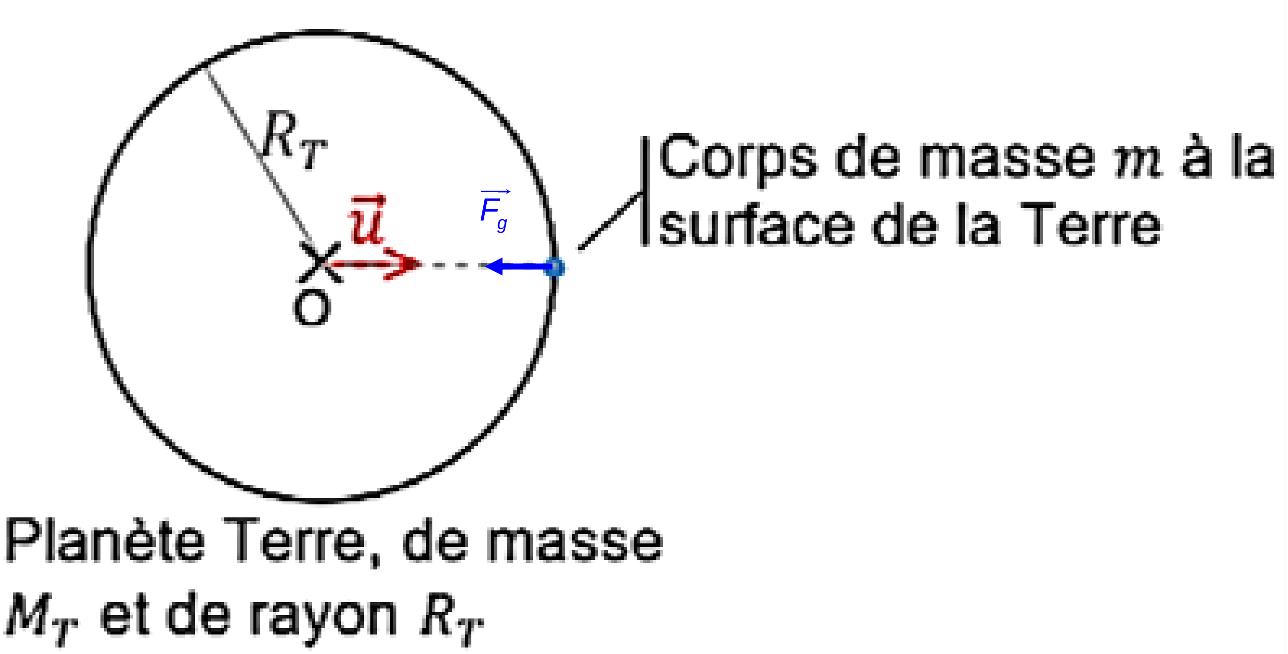
3. Déterminer la valeur de g au niveau de l'équateur.

$T = 2\pi.\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$T^2 = 4\pi^2.\frac{\ell}{g}$

$g = 4\pi^2.\frac{\ell}{T^2}$ donc $g = 4\pi^2 \times \frac{0{,}991}{2{,}00^2}$ = 9,78 m.s^{-2}

4. Reproduire sur sa copie le schéma de la Terre ci-dessous et le compléter, sans souci d'échelle, en rajoutant la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_g}$ exercée par la planète Terre sur un corps modélisé par un point matériel de masse m situé à sa surface. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.



Données

- Constante de gravitation universelle : G = 6,674 30 × 10^{-11} N·m²·kg⁻².
- Rayon de la Terre au niveau de l'équateur : R_T = 6 378 km.

5. Exprimer vectoriellement la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_g}$ exercée par la Terre sur un objet de masse m situé à sa surface. En admettant que le champ de gravitation est égal au champ de pesanteur et donc que $F_g = P$, en déduire l'expression littérale de M_T puis calculer sa valeur numérique.

$$\boxed{\overrightarrow{F_g} = -G.\frac{M_T.m}{R_T^2}.\vec{u}}$$

$$F_g = G.\frac{M_T.m}{R_T^2} = P$$

Donc $G.\dfrac{M_T.m}{R_T^2} = m.g$ soit $G.\dfrac{M_T}{R_T^2} = g$

d'où $M_T = g.\dfrac{R_T^2}{G}$ donc $M_T = 9{,}78 \times \dfrac{(6378\times10^3)^2}{6{,}67430\times10^{-11}}$ = 5,96×10^{24} kg

Données

- Incertitude-type de l'intensité du champ de pesanteur terrestre : $u(g)$ = 0,05 m·s⁻².
- Incertitude-type du rayon de la Terre : $u(R_T)$ = 1 km.
- On admettra que : $u(M_T) = M_T \times \sqrt{\left(\frac{u(g)}{g}\right)^2 + \left(2 \times \frac{u(R_T)}{R_T}\right)^2}$.
- Masse de référence de la Terre : M'_T = 5,98 × 10^{24} kg ;
- le résultat d'une mesure x est considéré en accord avec une valeur de référence x_{ref} si la valeur du quotient $\frac{|x-x_{ref}|}{u(x)}$ est inférieure ou égale à 2, avec $u(x)$, l'incertitude-type associée.

6. Calculer l'incertitude $u(M_T)$ sur la masse de la Terre et vérifier que la valeur expérimentale M_T est bien en accord avec la valeur communément admise de nos jours notée M'_T.

$$u(M_T) = M_T.\sqrt{\left(\frac{u(g)}{g}\right)^2 + \left(2.\frac{u(R_T)}{R_T}\right)^2}$$

$u(M_T) = 5{,}96\times10^{24} \times \sqrt{\left(\dfrac{0{,}05}{9{,}78}\right)^2 + \left(2\times\dfrac{1}{6378}\right)^2}$ = 4×10^{22} kg = 0,04×10^{24} kg en arrondissant par excès à <u>un seul chiffre significatif</u>.

Remarque : 3×10^{22} kg est aussi accepté.

On calcule $z = \dfrac{|M_T - M'_T|}{u(M_T)}$ (appelé le z-score) :

$z = \dfrac{|5{,}96 - 5{,}98|}{0{,}04}$ = 0,5 < 2 donc le résultat est en accord avec la valeur admise de nos jours.

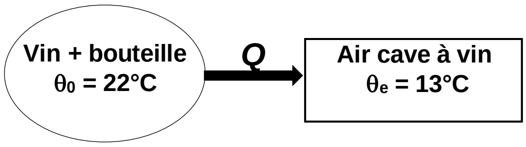
Remarque : z = 0,66 < 2 avec l'autre valeur acceptable pour $u(M_T)$.

Exercice B : Cave à vin (10 points)

Partie 1 – Evolution de la température - Durée du refroidissement

1. À l'aide du premier principe de la thermodynamique, relier la variation d'énergie interne ΔU du système {vin + bouteille} au transfert thermique Q entre l'air et le système.

Le système {vin + bouteille} est à la température initiale θ_0 = 22°C quand il est placé dans la cave à vin dont l'air ventilé est à la température θ_e = 13°C. Un transfert thermique *Q* à donc lieu du système vers le milieu extérieur.



Premier principe appliqué au système {vin + bouteille} : $\boxed{\Delta U = Q}$ **(*Q* < 0 et *W* = 0).**

2. Exprimer le transfert thermique Q pendant une durée très petite Δt en fonction du flux thermique Φ supposé constant pendant cette durée et de Δt. Rappeler les unités, dans le système international, des grandeurs intervenant dans cette expression.

$\Phi = \dfrac{Q}{\Delta t}$ **donc** $\boxed{Q = \Phi \times \Delta t}$ **avec Φ en W, *Q* en J et Δt en s.**

3. Exprimer le flux thermique Φ en fonction de la capacité thermique C du système supposé incompressible, de sa variation de température ΔT et de la durée Δt.

On a : $\Delta U = C \times \Delta T = Q$ **donc** $\boxed{\Phi = \dfrac{C \times \Delta T}{\Delta t}}$

4. En utilisant la loi phénoménologique de Newton, et en faisant tendre Δt vers 0, vérifier que l'équation différentielle qui régit l'évolution de la température T s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau}(T - T_{air})$$

En déduire l'expression et l'unité de τ.

Loi phénoménologique de Newton : $\Phi = -h \times S \times (T - T_{air})$ **et** $\Phi = \dfrac{C \times \Delta T}{\Delta t}$

En égalant les deux expressions du flux thermique : $-h \times S \times (T - T_{air}) = \dfrac{C \times \Delta T}{\Delta t}$

Donc : $\dfrac{\Delta T}{\Delta t} = -\dfrac{h \times S}{C} \times (T - T_{air})$.

En faisant tendre Δt vers 0 : $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{\Delta T}{\Delta t}\right) = \dfrac{dT}{dt}$ **donc** $\boxed{\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{hS}{C}(T - T_{air})}$

En comparant avec l'expression : $\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{1}{\tau}(T - T_{air})$**, il vient :** $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{hS}{C}$ **soit** $\boxed{\tau = \dfrac{C}{hS}}$

L'expression $\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{1}{\tau}(T - T_{air})$ **montre que *t* est homogène à un temps.**

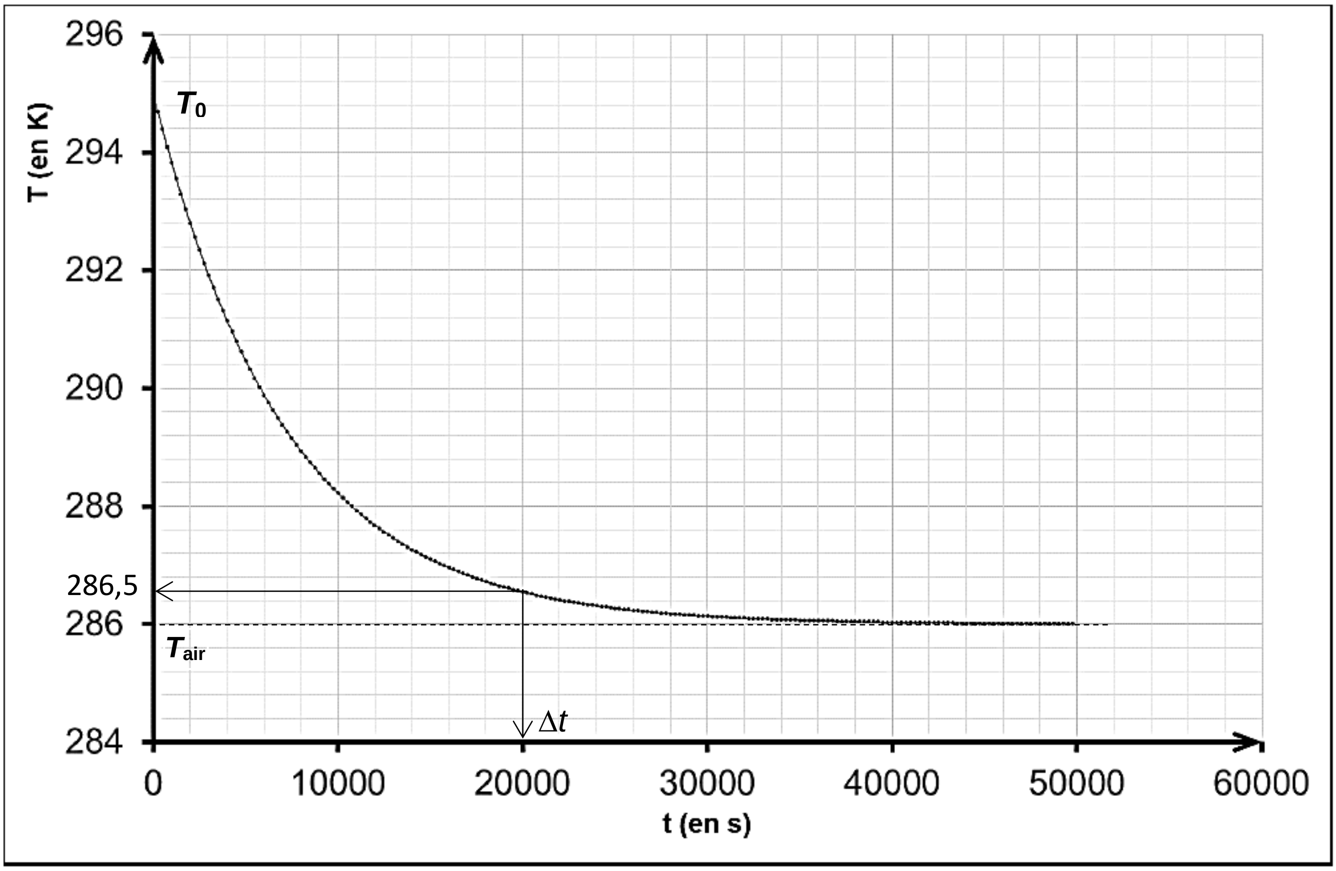
5. Retrouver à l'aide des résultats de la modélisation les valeurs de T_0 et de T_{air}.

On a : $T(t) = (T_0 - T_{air})e^{-\frac{t}{\tau}} + T_{air}$ **donc :** $T(0) = (T_0 - T_{air})e^{0} + T_{air} = T_0$

$$T(t \to \infty) = (T_0 - T_{air})e^{-\infty} + T_{air} = T_{air}$$

Graphiquement : T_0 **= 295 K soit** θ_0 **= (295 – 273) °C = 22 °C.**

T_{air} **= 286 K soit** θ_{air} **= (286 – 273) °C = 13 °C.**



6. Estimer graphiquement au bout de combien de temps, au minimum, le vin pourra être servi à la température souhaitée (à 0,5 degré près). Donner le résultat en heures.

La température idéale est de 13 °C, soit 286 K. À 0,5 degré près soit 0,5 K, il faut chercher l'abscisse du point d'intersection entre la droite horizontale à la température 286,5 K et la courbe.

Graphiquement : $\Delta t \approx$ 20 000 s ≈ 5,5 h.

<u>Partie 2 – Cave à vin et niveau d'intensité sonore</u>

7. Montrer que le niveau sonore total émis par les deux caves à vin, à 1,0 m de celle-ci sans la cloison serait de 45 dB.

On a : $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ donc $I = I_0 \times 10^{\frac{L}{10}}$.

Pour une seule cave à vin dont le niveau sonore moyen vaut L = 42 dB :

$I = 1{,}0 \times 10^{-12} \times 10^{\frac{42}{10}}$ = 1,58×10^{-8} W·m^{-2}

Pour deux caves à vin de même niveau sonore : I_{tot} = 2×I = 3,16×10^{-8} W·m^{-2}

Et le niveau sonore total est : $L_{tot} = 10\log\left(\frac{I_{tot}}{I_0}\right) = 10 \times \log\left(\frac{3{,}16 \times 10^{-8}}{1{,}0 \times 10^{-12}}\right)$ = 45 dB.

8. Le signal sonore émis par les deux caves serait-il audible par les clients placés derrière la cloison ? Justifier.

Pour f = 200 Hz, l'atténuation A vaut 25 dB

Soit un niveau sonore derrière la cloison de 45 – 25 = 20 dB.

Graphiquement, pour f = 200 Hz, le seuil d'audibilité est de 15 dB.

À priori, le son devrait être audible (20 dB > 15 dB) mais il doit très certainement être couvert par le bruit ambiant de la salle de restaurant.